e5486

Soit l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, muni d'une base canonique orthonormée directe.

Soit l'application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, telle que $f : (x\,;y) \to f(x\,;y) = (x + 2y\,; 2x + y)$.

Soit l'application linéaire $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, telle que $g : (x\,;y) \to g(x\,;y) = (2x\,; x + y)$.

1/ Exprimer F et G, matrices respectives de f et g dans la base choisie.

2/ Exprimer les matrices H et K des applications linéaires $h = 3f - 2g$ et $k = g \circ f$.

e5487

Soit l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, muni d'une base canonique orthonormée directe.

Soit l'application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, telle que $f : (x\,;y) \to f(x\,;y) = (2x\,; x + y)$.

1/ Exprimer F, matrice de f dans la base canonique choisie, que l'on appellera $B(i\,;j)$ ou $B(\overrightarrow{i}\,;\overrightarrow{j})$.

2/ Soit les vecteurs $u = (1\,;-1) = i - j$ et $v = (0\,;2) = 2j$.

a) Vérifier que $(u\,;v)$ est une base B' de $\mathbb{R}^2$.

b) Exprimer F', matrice de f dans la base B' .

e5135 ROC

Soit la matrice carrée $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$.

1/ Démontrer que la matrice A ne peut être inversible que si son *déterminant* $D = ad - bc$ est non nul, c'est-à-dire qu'il existe une matrice B carrée telle que $A \times B = B \times A = I_2$, avec $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2/ Vérifier que l'inverse de A et $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{d}{D} & -\frac{c}{D} \\ -\frac{b}{D} & \frac{a}{D} \end{pmatrix}$.

e5128

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

1/ Calculer A^2 sans machine.

2-a) Calculer $A^2 - 3.A + 2I_2$.

b) En déduire que A est inversible et donner son inverse A^{-1} .

3/ Application : Résoudre $\begin{cases} -x - 2y = -4 \\ 3x + 4y = 10 \end{cases}$.

e5129

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1/ Calculer M^2 puis M^3 sans machine.

2/ En déduire M^n en fonction de n entier naturel non nul.

e5019

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et la matrice Identité $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1/ Calculer A^2 , A^3 , et pour tout entier naturel $n \geq 4$: A^n .

2/ A tout nombre réel x , on associe la matrice $M(x) = I_3 + x.A + \frac{x^2}{2}.A^2$.

a) Ecrire la matrice $M(x)$.

b) Montrer que, pour tout réels x et y : $M(x + y) = M(x) \times M(y) = M(y) \times M(x)$.

c) En déduire que, pour tout réel x , la matrice $M(x)$ est inversible. Déterminer son inverse $[M(x)]^{-1}$.

e5008

On note $I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ la matrice identité de l'ensemble des matrices d'ordre 3.

On note $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$.

1/ On pose $B=A-I$. Calculer B^2 et B^3.

2/ On souhaite calculer $A^n=(B+I)^n$, pour tout $n\in\mathbb{N}$.

a) Peut-on utiliser la formule du binôme de Newton pour développer $(B+I)^n$? Justifier la réponse.

b) Démontrer que pour tout $n\geq 3$, on a $A^n=(B+I)^n=\binom{n}{0}I+\binom{n}{1}B+\binom{n}{2}B^2$.

En déduire l'expression de A^n pour tout $n\geq 3$.

e5022

Soient $A=\begin{pmatrix}2&1&0\\-1&2&3\\0&5&6\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}3\\-6\\5\end{pmatrix}$.

1) Calculer le produit $A\times B$.

2) En déduire que A n'est pas inversible.

e5134

Soit la matrice carrée $A=\begin{pmatrix}2&1&0\\-1&2&3\\0&5&6\end{pmatrix}$.

1/ Soit $B=\begin{pmatrix}3\\-6\\5\end{pmatrix}$. Calculer le produit $A\times B$.

2/ En déduire que A n'est pas inversible.

e5002

On note $I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ la matrice identité de l'ensemble des matrices d'ordre 3.

Pour montrer qu'une matrice P est inversible, il suffit de démontrer qu'il existe une matrice Q telle que $P\times Q=I$.

Q est alors appelée matrice inverse P^{-1} de P.

On note $A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$.

Partie A : Puissances et inverse d'une matrice.

1/ calculer A^2.

2/ Démontrer que $A^2=A+2I$ (E).

3/ Utiliser de façons indépendantes l'égalité (E) pour :

a) Calculer A^3,

b) Démontrer que $\frac{1}{2}A(A-I)=I$.

4/ En déduire que A est inversible et déterminer sa matrice inverse A^{-1}.

Partie B : Stock et matrice.

Une entreprise fabrique trois produits X_1, X_2 et X_3, à partir de trois unités de production U, V et W.

- La fabrication d'un produit X_1 consomme une unité V et une unité W,
- La fabrication d'un produit X_2 consomme une unité U et une unité W,
- La fabrication d'un produit X_3 consomme une unité U et une unité V.

Un programme de fabrication est défini par les trois valeurs : x, la quantité de produit X_1 fabriquée, y, la quantité de produit X_2 fabriquée, z, la quantité de produit X_3 fabriquée.

Sachant que l'entreprise dispose d'un stock de 5 unités U, 12 unités V et 13 unités W, on cherche à déterminer s'il existe un programme de fabrication qui épuise exactement le stock disponible.

1/ Trouver une équation matricielle résumant le problème posé dont l'inconnue serait la matrice colonne $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

2/ En utilisant un résultat établi dans la partie A, résoudre l'équation matricielle obtenue et conclure.

e5136

Soit la matrice carrée $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, supposée inversible, donc de déterminant $D = ad - bc \neq 0$.

Dans la suite de l'exercice, on supposera que $A = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1/ Déterminer les *valeurs propres* de la matrice, soit deux réels α et β non nuls, tels qu'il existe des vecteurs U et V non nuls vérifiant $\begin{cases} A \times U = \alpha . U \\ A \times V = \beta . V \end{cases}$, puis proposer deux vecteurs propres U et V correspondants.

2/ Soit P la matrice dont les deux colonnes sont U et V, que l'on notera $P = [U\,;V]$.

Vérifier que P est inversible, puis calculer P^{-1}.

3-a) Calculer $B = P^{-1} \times A \times P$. Que constate-t-on ?

b) Démontrer par récurrence que B diagonale implique B^n diagonale, et exprimer B^n en fonction de B.

4-a) Prouver que $B = P^{-1} \times A \times P$ implique $A = P \times B \times P^{-1}$.

b) Démontrer par récurrence que $A = P \times B \times P^{-1}$ implique $A^n = P \times B^n \times P^{-1}$, pour $n \in \mathbb{N}$.

c) *Application* : Calculer A^n en fonction de n.

e5132

Soit la matrice carrée $A = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

On appelle *valeur propre* de la matrice A, tout réel λ tel qu'il existe des vecteurs $V = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ non nuls, tels que $A \times V = \lambda . V$.

a) Déterminer les valeurs propres λ associées à la matrice A.

b) Pour chaque valeur propre λ trouvée, déterminer l'ensemble E_λ des vecteurs V associés (tels que $A \times V = \lambda . V$).